Zum Übergang von der Wellenoptik zur geometrischen Optik in der allgemeinen Relativitätstheorie *

JÜRGEN EHLERS

The University of Texas, Austin, Texas, USA

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1328—1333 [1967]; eingegangen am 1. Juni 1967)

Herrn Professor Dr. PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

The transition from the (covariantly generalized) MAXWELL equations to the geometrical optics limit is discussed in the context of general relativity, by adapting the classical series expansion method to the case of curved space time. An arbitrarily moving ideal medium is also taken into account, and a close formal similarity between wave propagation in a moving medium in flat space time and in an empty, gravitationally curved space-time is established by means of a normal hyperbolic optical metric.

Die geometrisch-optische Näherung ist insbesondere im Rahmen der relativistischen Kosmologie ein wichtiges Hilfsmittel zur relativ einfachen Beschreibung der Lichtausbreitung in Gravitationsfeldern, siehe z. B. [1–3]. Ihre Begründung vom Standpunkt der (kovariant verallgemeinerten) MAXWELLschen Theorie aus steht aber an Strenge deutlich zurück hinter der entsprechenden Begründung der geometrischen Optik in der klassischen Theorie ruhender Medien im flachen Raum (siehe zu der letzteren [4, 5] und die dort angegebenen Arbeiten). In dieser Mitteilung wird gezeigt, wie man die in der klassischen Theorie üblichen Reihenentwicklungen in natürlicher Weise so verallgemeinern kann, daß sie zur Rechtfertigung der geometrischen Optik in der allgemeinen Relativitätstheorie dienen können, wodurch zugleich auch ein Verfahren zur Bestimmung höherer Näherungen und zur Fehlerabschätzung gewonnen ist.

Die Verallgemeinerung besteht darin, daß

a) beliebige Gravitationsfelder (nichtflache Metriken) zugelassen werden,

b) die Materie sich beliebig ungleichförmig bewegen darf,

c) die Zeitabhängigkeit der Felder nicht eingeschränkt wird.

Wir hoffen zu zeigen, daß wie in anderen Teilen der Elektrodynamik auch hier die vierdimensionalkovariante, die weltgeometrischen Relationen betonende Behandlung zugleich allgemeiner und durchsichtiger ist als die älteren Methoden.

Man kann die Gesetze der relativistischen geometrischen Optik formal auch dadurch ableiten, daß man die charakteristischen Unstetigkeiten der MAXWELLschen Gleichungen studiert, was in verschiedener Allgemeinheit in [6–8] geschehen ist.

Im stationären Fall, d. h. wenn g_{ab}, u^a, n (siehe Abschnitt 1) gegenüber einer eindimensionalen Gruppe mit zeitartigen Trajektorien invariant sind, werden die in Abschnitt 3 formulierten Gesetze den klassischen besonders ähnlich; es gilt dann auch ein FERMATsches Prinzip [7].

1. Voraussetzungen und Grundgleichungen

Sei W eine (flache oder gekrümmte) Raumzeit-Mannigfaltigkeit und g_{ab} ihr metrischer Tensor mit der Signatur $(+++-)$. Ein beliebig bewegtes Medium habe die Vierergeschwindigkeit u^a, $u_a u^a = -1$. Das Medium sei isotrop, durchsichtig und dispersionsfrei, so daß seine elektromagnetischen Eigenschaften durch eine skalare reelle Dielektrizitätskonstante ε und entsprechende Permeabilität μ, die

* This research has been sponsored by the Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force.

1 J. KRISTIAN u. R. K. SACHS, Astrophys. J. **143**, 379 [1966].

2 B. BERTOTTI, Proc. Roy. Soc. London A **294**, 195 [1966].

3 D. ZIPOY, Phys. Rev. **142**, 825 [1966].

4 M. BORN u. E. WOLF, Principles of Optics, New York 1959, insbes. Kap. III.

5 R. COURANT u. D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, New York 1962, insbes. Kap. VI, § 5.

6 A. LICHNEROWICZ, Ann. Matematica **4**, 1 [1960].

7 P. M. QUAN, Beitrag zur Konferenz über Relativitätstheorie in Royaumont 1959; siehe Les Theories Relativistes de la Gravitation, Paris 1962, S. 165.

8 B. HOFFMANN (Herausg.), Perspectives in Geometry and Relativity, Bloomington 1966; Beitrag von J. EHLERS, S. 127.

beide (stetig differenzierbare) Funktionen des Raumzeitpunktes x^a sein dürfen, gekennzeichnet sind.

Unter diesen Voraussetzungen genügen die beiden elektromagnetischen Bivektoren $F_{ab}\,(\equiv(\mathfrak{B},\mathfrak{E}))$ und $H_{ab}\,(\equiv(\mathfrak{H},\mathfrak{D}))$ den MAXWELLschen Gleichungen

$$F_{[ab,c]}=0\,,\qquad H^{ab}{}_{;b}=0 \tag{1}$$

und den Zustandsgleichungen [9]

$$H_{ab}\,u^b=\varepsilon\,F_{ab}\,u^b,\qquad F_{[ab}\,u_{c]}=\mu\,H_{[ab}\,u_{c]}\,. \tag{2}$$

Die kovariante Ableitung in (1), angedeutet durch „;", bezieht sich auf den durch g_{ab} in W definierten RIEMANNschen Zusammenhang.

GORDON [10] hat bemerkt, daß sich die Gln. (2) erheblich vereinfachen lassen dadurch, daß man in W außer der Metrik g_{ab} eine zweite, von der Bewegung und dem Brechungsindex $n:=\sqrt{\varepsilon\,\mu}$ des Mediums abhängige „optische Metrik"

$$\bar g_{ab}:=g_{ab}+(1-1/n^2)\,u_a\,u_b \tag{3}$$

einführt. Die Gln. (2) sind äquivalent zu

$$H^{ab}=(1/\mu)\,\bar F^{ab};\qquad \bar F^{ab}:=\bar g^{ac}\,\bar g^{bd}\,F_{cd}\,. \tag{4}$$

Wenn wir übereinkommen, künftig $\bar g_{ab}$ als Metrik von W anzusehen und dementsprechend Indexverschiebungen und kovariante Ableitungen zu bilden, und wenn wir F_{ab} als die von der Metrik unabhängige Feldgröße ansehen, erhalten wir mit der Abkürzung

$$e^u:=(\varepsilon/\mu)^{1/4} \tag{5}$$

statt (1), (2) die Grundgleichungen

$$F_{[ab,c]}=0\,,\qquad (e^{2u}\,F^{ab})_{;b}=0\,. \tag{6}$$

Weil die optische Metrik auch normal hyperbolisch ist, sind nach (6) die Ausbreitungsgesetze für elektromagnetische Wellen in bewegten Medien formal fast gleichwertig – nämlich bis auf den Faktor e^{2u} – mit denen im Vakuum. Selbst für ein in die MINKOWSKI-Welt eingebettetes Medium ist im allgemeinen die optische Metrik nicht flach.

Die Gln. (6) sind wie die Vakuum-MAXWELL-Gleichungen konforminvariant. Das bedeutet, daß eigentlich nicht die RIEMANNsche Metrik g_{ab} selbst, sondern nur die dadurch in W definierte konforme Struktur (siehe [8], Beitrag von F. A. E. PIRANI und A. SCHILD, S. 291) benötigt wird für das Studium der Gln. (6).

Mit dem komplexen, selbstdualen Bivektor

$$G:=e^u(F+i\,F^*)\qquad (i\,G^*=G) \tag{7}$$

lassen sich die Gln. (6) zu der einen Gleichung

$$\nabla\cdot G+\nabla u\cdot\bar G=0 \tag{8}$$

zusammenfassen. Darin bedeutet ∇ den Operator der kovarianten Differentiation, und ein Punkt deutet Verjüngung über benachbarte Indizes an. F^* ist der zu F (reell-) duale Bivektor, $\bar a$ die zu a konjugiert komplexe Größe.

2. Lokal näherungsweise ebene Wellen

Um den Übergang zur geometrischen Optik zu studieren, betrachten wir einparametrige Scharen $G(x;\varepsilon)$ von Bivektorfeldern [11] von der Form

$$G(x;\varepsilon)=e^{iS(x)/\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu\,K_\nu(x)\;+e^{-iS(x)/\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu\,L_\nu(x)\,, \tag{9}$$

$$\nabla S\neq 0\,. \tag{10}$$

Hierin soll $S(x)$ ein reelles Skalarfeld bedeuten, die $K_\nu(x)$ und $L_\nu(x)$ sind komplex-selbstduale [vgl. Gl. (7)] Bivektorfelder, und ε ist ein Parameter, der in einem Intervall $0<\varepsilon<e(x)$ variiert.

Der Ansatz (9) soll ausdrücken, daß die Felder $G(x,\varepsilon)$ für hinreichend kleines ε lokal näherungsweise ebene Wellen mit der (schnell veränderlichen) Phase S/ε, dem Ausbreitungs-Vierervektor $1/\varepsilon\cdot\nabla S$ und den (langsam veränderlichen) Amplituden $K_0+\varepsilon\,K_1+\dots$, $L_0+\varepsilon\,L_1+\dots$ sind.

Wegen des zweiten Gliedes in (8) sind beide Reihen in (9) nötig; selbst im Vakuum $(u=0)$ braucht man beide Terme, wenn man von vornherein alle Polarisationszustände berücksichtigen will.

Einsetzen von (9) in (8) ergibt formal eine Reihe mit Gliedern der Art

$$\left.\begin{matrix}e^{iS/\varepsilon}\\ e^{-iS/\varepsilon}\end{matrix}\right\}\cdot\varepsilon^\nu\cdot\text{Funktion von } x,\qquad \nu=-1,0,1,2,\dots$$

Wir wollen mit $\{\nu\}$ diejenigen zwei Gleichungen bezeichnen, die durch Nullsetzen der Faktoren von ε^ν entstehen.

[9] Es wird gelegentlich behauptet, die Gln. (1) und (2) seien nur in gleichförmig bewegten Körpern gültig. Das ist falsch, wie die elektronentheoretisch-statistische Herleitung dieser Gleichungen zeigt: A. N. KAUFMANN, Ann. Phys. New York **18**, 264 [1962].

[10] W. GORDON, Ann. Phys. **72**, 421 [1923].

[11] Von jetzt an tritt die Dielektrizitätskonstante nicht mehr explizit auf, und wir nehmen ε als Zeichen für einen „kleinen" Parameter.

Wenn die beiden Reihen in (9) punktweise konvergieren und die gliedweise nach x differenzierten Reihen (in W) umgebungsweise gleichmäßig konvergieren, ist das System der Gleichungspaare $\{\nu\}$ mit Gl. (8) äquivalent. Aus

$$e^{iS/\varepsilon}\sum_{\nu=-1}^{\infty}\varepsilon^\nu a_\nu = e^{-iS/\varepsilon}\sum_{\nu=-1}^{\infty}\varepsilon^\nu b_\nu$$

folgt nämlich bei Konvergenz der Reihen

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(e^{2iS/\varepsilon}a_{-1}) = b_{-1},$$

was für $S \neq 0$ impliziert, daß $a_{-1}=b_{-1}=0$ ist, und entsprechend ergibt sich induktiv das Verschwinden aller Glieder.

Wir untersuchen nun die Folge der Gleichungspaare $\{\nu\}$. Sie sieht so aus:

$$\nabla S\cdot K_0 = 0, \quad \nabla S\cdot L_0 = 0, \qquad \{-1\}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot K_\nu + i\nabla S\cdot K_{\nu+1} + \nabla u\cdot \bar{L}_\nu &= 0,\\ \nabla\cdot L_\nu - i\nabla S\cdot L_{\nu+1} + \nabla u\cdot \bar{K}_\nu &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad \{\nu\}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aus $\{-1\}$ folgt mit (10) in bekannter Weise (siehe z. B. [12], Kap. IX): Die Hyperflächen $S=\text{const}$ sind Nullhyperflächen,

$$(\nabla S)^2 = 0 \qquad (11)$$

(Eikonalgleichung), und K_0, L_0 sind Nullbivektoren zum Eigenvektor

$$k := \nabla S. \qquad (12)$$

Damit sind die Folgerungen aus $\{-1\}$ erschöpft.

Sei eine Lösung S von (11) vorgegeben. Dann bilden die zum Vektorfeld k gehörigen Nullinien eine normale, geodätische Kongruenz, die Strahlenkongruenz von S. k ist nach (11) und (12) längs der Strahlen konstant,

$$k\cdot\nabla k = 0. \qquad (13)$$

Wir ergänzen k zu einem normierten Null-Vierbein $\{t, \bar{t}, k, m\}$, so daß also

$$t\cdot\bar{t} = k\cdot m = 1 \qquad (14)$$

ist und alle übrigen Skalarprodukte der Beinvektoren gleich Null sind. t und m seien wie k längs der Strahlen parallelverschoben,

$$k\cdot\nabla t = k\cdot\nabla m = 0. \qquad (15)$$

Expansion Θ und Verzerrung (Scherung) σ der Strahlenkongruenz sind dann durch

$$\Theta := \tfrac{1}{2}\nabla\cdot k = \tfrac{1}{2}\Box S = t\cdot\nabla k\cdot\bar{t}, \qquad (16)$$

$$\sigma := \bar{t}\cdot\nabla k\cdot\bar{t} \qquad (17)$$

gegeben, ihre geometrische und optische Bedeutung ist wohlbekannt (siehe z. B. [13]).

Das Null-Vierbein $\{t, \bar{t}, k, m\}$ bestimmt eine Basis $\{V, U, M\}$ des linearen Raumes der komplex-selbstdualen Bivektoren, nämlich $[(p\wedge q)_{ab} := 2\,p_{[a}\,q_{b]}$, vgl. [13], Anhang 4]

$$V := k\wedge\bar{t},\ \ U := m\wedge t,\ \ M := \bar{t}\wedge t + k\wedge m. \qquad (18)$$

Wegen (13) und (15) sind diese Bivektoren längs der Strahlen konstant; die in den Entwicklungen

$$\begin{aligned}K_\nu &= a_\nu V + b_\nu U + c_\nu M,\\ L_\nu &= a_\nu' V + b_\nu' U + c_\nu' M\end{aligned} \qquad (19)$$

auftretenden Skalare bestimmen also vollständig, wie sich die Amplituden K_ν, L_ν längs der Strahlen verändern.

Unter Benutzung der angegebenen Hilfsgrößen läßt sich die in den Gleichungen $\{-1\}$ enthaltene Information über K_0, L_0 so ausdrücken:

$$b_0 = b_0' = c_0 = c_0' = 0. \qquad (20)$$

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns den Gleichungen $\{0\}$, $\{1\}$, ... zu. Wir setzen die Entwicklungen (19) in $\{\nu\}$ ein und multiplizieren die resultierenden Vektorgleichungen der Reihe nach skalar mit t, $\bar{t}$, m, k. Es entstehen Gleichungen der Form (sei $(\ \ )^{\cdot} := k\cdot\nabla(\ \ )$)

$$\dot{a}_\nu + \Theta\,a_\nu = A[c_\nu, \bar{b}_\nu', \bar{c}_\nu'], \qquad \{\nu\,t\}$$

$$b_{\nu+1} = B[a_\nu, b_\nu, c_\nu, \bar{a}_\nu', \bar{c}_\nu'], \qquad \{\nu\,\bar{t}\}$$

$$c_{\nu+1} = C[a_\nu, b_\nu, c_\nu, \bar{a}_\nu', \bar{c}_\nu'], \qquad \{\nu\,m\}$$

$$\dot{c}_\nu + 2\,\Theta\,c_\nu = D[\bar{b}_\nu', \bar{c}_\nu']. \qquad \{\nu\,k\}$$

Darin sind A, B, C, D Linearformen in den angegebenen Argumentfunktionen und deren Gradienten, deren Koeffizienten aus den Basisvektoren t, $\bar{t}$, k, m und deren ersten Ableitungen gebildet sind. Entsprechende Gleichungen gelten für a_ν', $b'_{\nu+1}$, $c'_{\nu+1}$, c_ν'.

Wegen (20) ist $\{0\,k\}$ identisch erfüllt.

Diese Gleichungen können sukzessive gelöst werden nach folgendem Verfahren:

[12] J. L. Synge, Relativity: The Special Theory, Amsterdam 1956.

[13] P. Jordan, J. Ehlers u. R. K. Sachs, Akad. Wiss. Lit. Mainz Abhandl. Math.-Nat. Kl. Nr. 1 [1961].

Man gibt eine Anfangshyperfläche $\mathfrak{A}$ vor, die jeden Strahl der Kongruenz genau einmal schneidet (siehe Abb. 1).

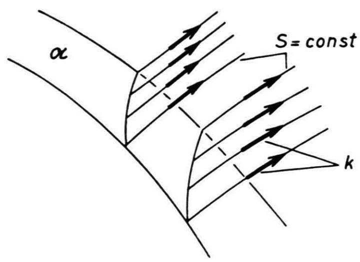

Abb. 1.

Außerdem gibt man die Werte der Amplituden a_ν, a_ν' für $\nu = 0, 1, \ldots$ auf $\mathfrak{A}$ vor. Wegen (20) bestimmt $\{0\,t\}$, d. h.

$$\dot a_0 + \Theta\, a_0 = 0\,, \qquad \dot a_0' + \Theta\, a_0' = 0\,, \tag{21}$$

a_0 und a_0' überall in dem von Strahlen überstrichenen Bereich.

Wenn $a_\nu, \ldots, c_\nu'$ schon bekannt sind, bestimmen die Gleichungen $\{\nu\,t\}$ überall $b_{\nu+1}$, $b'_{\nu+1}$. Außerdem soll $\{\nu\,m\}$ dazu benutzt werden, $c_{\nu+1}$ und $c'_{\nu+1}$ auf $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, und daraufhin gestattet das Gleichungspaar $\{\nu+1\,k\}$ die Berechnung von $c_{\nu+1}$, $c'_{\nu+1}$ überall. Schließlich legt $\{\nu+1\,t\}$ zusammen mit den Anfangswerten $a_{\nu+1}$, $a'_{\nu+1}$ überall fest.

Wenn die mit den so bestimmten Koeffizienten gebildete Reihe (9) konvergiert und die gliedweise differenzierte Reihe lokal gleichmäßig konvergiert, dann genügt nach Konstruktion G der Gleichung

$$\nabla\cdot G + \nabla u\cdot \bar G = \lambda\, k\,, \tag{22}$$

worin λ ein Skalar ist, der längs $\mathfrak{A}$ verschwindet. ($\{\nu\,m\}$ wurde ja nur auf $\mathfrak{A}$ befriedigt.) Aus (22) folgt aber

$$\nabla\cdot(\lambda\, k) = \dot\lambda + 2\,\Theta\,\lambda = \bar\lambda\, u\,, \tag{23}$$

also ist λ sogar überall gleich Null, und G erfüllt die MAXWELLschen Gleichungen. (Die c_ν genügen also überall den Gleichungen $\{\nu\,m\}$, so daß die Gleichungen $\{\nu\,k\}$ überflüssig sind.)

Auch wenn die Reihe nicht konvergiert, darf man erwarten, daß für hinreichend kleine ε die Teilsummen von (9) näherungsweise MAXWELL-Felder beschreiben.

3. Die niedrigste geometrisch-optische Näherung

Wenn eine Lösung $G(x;\varepsilon)$ der Form (9) (oder eine Näherungslösung in Form einer endlichen Teilsumme) gegeben ist, ist für hinreichend kleines ε

$$e^{iS/\varepsilon} K_0 + e^{-iS/\varepsilon} L_0 \tag{24}$$

eine beliebig gute Näherung für $G(x;\varepsilon)$.

Das Verhalten von (24) ist wegen (19), (20) vollständig bestimmt durch die Eikonalgleichung (11) und die Fortpflanzungsgleichungen (15) und (21). Wenn wir mit r eine positive Lösung von

$$\dot r = \Theta\, r \tag{25}$$

bezeichnen, so daß also längs eines Strahls r^2 so variiert wie der Querschnitt eines dünnen Strahlenbündels, das den zuerst genannten Strahl umgibt [13], können wir den (24) entsprechenden Feldstärkentensor F in der Form

$$F = (1/r)\,(\mu/\varepsilon)^{1/4}\, k \wedge \Re\left(e^{iS/\varepsilon}[a_+\, t + a_-\, \bar t]\right) \tag{26}$$

schreiben, wo nun a_+, a_- längs der Strahlen konstante komplexe Funktionen (Amplituden zu positiver und negativer Helizität) sind.

Der zu (26) gehörige formale Energie-Impulstensor $T := -F\cdot F$ — gebildet, als ob die optische Metrik die „wahre“ Metrik und das Feld ein Vakuumfeld wäre — ist

$$T = k \otimes k\,(1/2\,r^2)\,\sqrt{\mu/\varepsilon} \cdot \left(|a_+|^2 + |a_-|^2 + 2\,\Re[a_+\, a_-\, e^{2iS/\varepsilon}]\right). \tag{27}$$

Dieser Tensor genügt (exakt) dem „Erhaltungssatz“

$$\nabla\cdot\left(\sqrt{\varepsilon/\mu}\, T\right) = 0\,. \tag{28}$$

Die hier angegebenen Gleichungen enthalten die in der Einleitung angekündigte gemeinsame Verallgemeinerung der Gesetze der klassischen geometrischen Optik ruhender Medien und der relativistischen geometrischen Optik im Gravitationsvakuum.

Mittelung über einige Lichtperioden oder Übergang zu einem Polarisationsgemisch beseitigt den letzten Term in (27), und nach (27) und (28) benimmt sich ein geometrisch-optisches Feld energetisch wie ein inkohärentes Photonengas mit der „Vierergeschwindigkeit“ k und der aus (27) abzulesenden Dichte.

Nach der auf das Vakuum spezialisierten Gl. (26), in der längs der Strahlen nur r variiert, ändert ein Gravitationsfeld nicht den Polarisationszustand eines Strahls bzw. den Polarisationsgrad eines Gemisches.

Der MINKOWSKIsche Energie-Impulstensor

$$T_{Ma}{}^{b} := F_{ac}\, H^{bc} - \tfrac{1}{4}\, \delta_a{}^b\, F_{cd}\, H^{cd} \qquad (29)$$

hängt wegen (4) mit dem Tensor (27) so zusammen:

$$T_a{}^b = \mu\, T_{Ma}{}^b.$$

Für irgend einen Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit v ist also $v^a\, T_{Ma}{}^b \sim k^b$, so daß die Strahlgeschwindigkeit

$$\mathfrak{k}/k^4 = [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}]/(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) \qquad (30)$$

ist. Das Ergebnis (30) beruht darauf, daß sich das Feld längs der geodätischen Nullinien der optischen Metrik ausbreitet, eine Aussage, die erst bei seitlich begrenzten Strahlenbündeln (und nicht bei streng ebenen Wellen) sinnvoll ist. Ob $T_{Ma}{}^b$ der physikalisch richtige Energie-Impulstensor ist, ist für (30) ganz unerheblich; diese schwierige Frage kann mit dem hier gewählten primitiven Materiemodell wohl auch gar nicht zureichend beantwortet werden. (Vergleiche hierzu [14], Anhang B. Dieses Urteil widerspricht dem von M. VON LAUE und W. PAULI; vergleiche [15], Supplementary Note 11.)

Für den obigen Beobachter ist auch

$$T_a{}^b\, v_b \sim S_{,a} \sim T_{Mab}\, v^b\,,$$

also ist der räumliche Anteil von $g^{ab}\, S_{,b}$, die Wellennormale, proportional zu $\mathfrak{D} \times \mathfrak{B}$.

Ohne systematisch höhere Näherungen zu untersuchen, wollen wir zum Abschluß als Beispiel eine der Gleichungen $\{0\, t\}$ angeben:

$$b_1 = i\, \bar{a}_0{}'\, \dot{u} - 2\, i\, \sigma\, a_0\,. \qquad (31)$$

Das Auftreten eines b_1-Terms in (9) bedeutet nach (18) und (19) eine teilweise „kontinuierliche Reflexion" der „Hauptwelle" (26). Nach (31) hängt die Größe von b_1 einfach von $\dot{u}$ und σ ab. Ähnlich zeigen die übrigen Gleichungen $\{\nu\}$, daß die Korrekturen zu (26) relativ um so größer sind, je schneller u raumzeitlich variiert und je stärker die Phasenhyperflächen $S = \text{const}$ gekrümmt sind, wie es physikalisch zu erwarten ist.

[14] V. L. GINZBURG, The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas, New York 1964.

[15] W. PAULI, Theory of Relativity, London 1958.